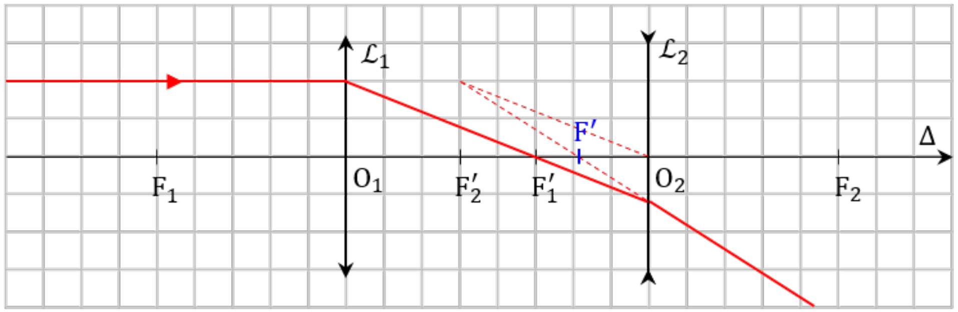
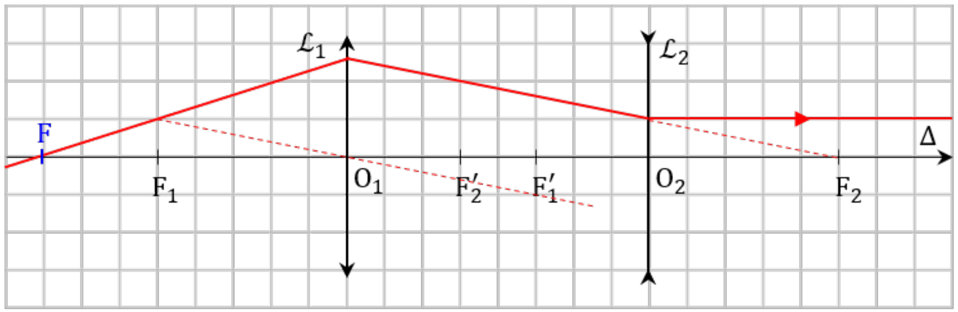
Exercice n°1 • Association de deux lentilles *cours*

1) Par définition de F et F' :

$$-\infty \text{ sur } \Delta \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_1' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'$$



$$F \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} +\infty \text{ sur } \Delta$$



2) On utilise les relations de conjugaison sur les transformations : $F\ \Delta \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} +\infty$. On a :

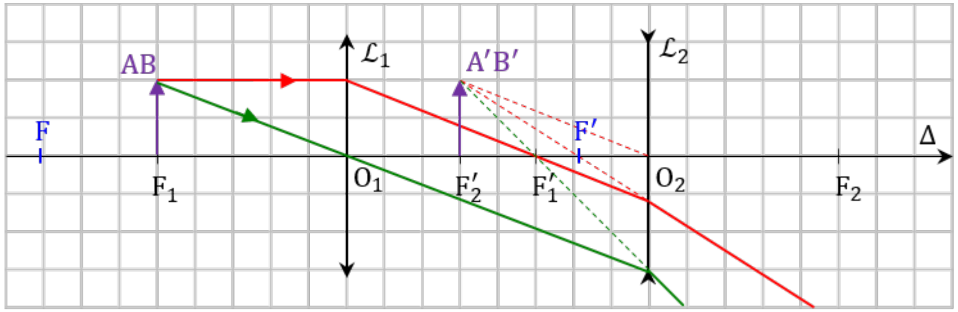
$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f_1'}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{e+a} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{a}$$
$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_1F} = -\frac{a\,(e+a)}{e} = -8,1 \text{ carreaux}}$$

On fait de même avec les transformations : $-\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F_1' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'$. On a :

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1'}} = \frac{1}{f_2'}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{-e+a} = \frac{1}{-a}$$
$$\Rightarrow \boxed{\overline{O_2F'} = -\frac{a\,(a-e)}{e} = -1,9 \text{ carreaux}}$$

3) On a :

$$F_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \pm\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F_2'$$



Grandissement graphiquement : les triangles F_1BO_1 et $F_2'B'O_2$ sont les mêmes. Donc $\boxed{\gamma = 1}$.
Par le calcul :

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \cdot \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{-a} \cdot \frac{-a}{-e + \overline{O_1A_1}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1A_1} - e}$$

On fait tendre $\overline{O_1A_1}$ vers $\pm\infty$.

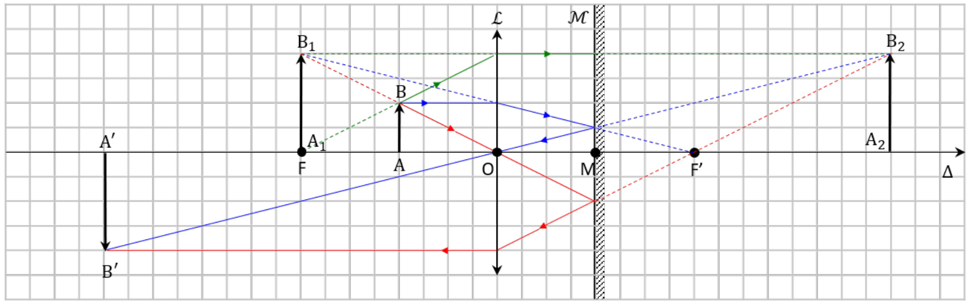
$$\gamma = \lim_{\overline{O_1A_1} \to \pm\infty} \left(\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A_1} - e} \right) = \boxed{1}$$

Exercice n°2 • Lentille + Miroir *cours*

1) L'objet AB donne, à travers le système optique, les différentes images intermédiaires suivantes :

$$AB \xrightarrow{\mathcal{L}} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{M}} A_2B_2 \xrightarrow{\mathcal{L}} A'B'$$

On représente les rayons sur le schéma ci-dessous. D'après le graphique, l'image est réelle, renversée, et agrandie d'un facteur 2.



L'image est réelle car le miroir inverse le sens de parcours de la lumière.

2) Nous allons retrouver ces propriétés par le calcul. On a :

$$\overline{OA} = -\frac{f'}{2}$$

Ainsi $\left(AB \xrightarrow{\mathcal{L}} A_1B_1\right)$:

$$\boxed{\overline{OA_1} = \left(\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}\right)^{-1} = -f'} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma_1 = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = 2}$$

De plus $\left(A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{M}} A_2B_2\right)$:

$$\begin{aligned} & \overline{MA_1} = -\overline{MA_2} \\ \Rightarrow\ & \overline{MO} + \overline{OA_1} = -\left(\overline{MO} + \overline{OA_2}\right) \\ \Rightarrow\ & -d + \overline{OA_1} = d - \overline{OA_2} \\ \Rightarrow\ & \boxed{\overline{OA_2} = 2d - \overline{OA_1} = 2f'} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma_2 = 1}$$

Attention, après que la lumière ait été réfléchie par le miroir, il faut penser inverser les points F et F' de la lentille (vrai pour les constructions graphiques et pour les calculs). Cela revient à changer f' en $-f'$ dans les formules.

$$\boxed{\overline{OA'} = \left(\frac{1}{\overline{OA_2}} + \frac{1}{-f'}\right)^{-1} = -2f'} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma_3 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA_2}} = -1}$$

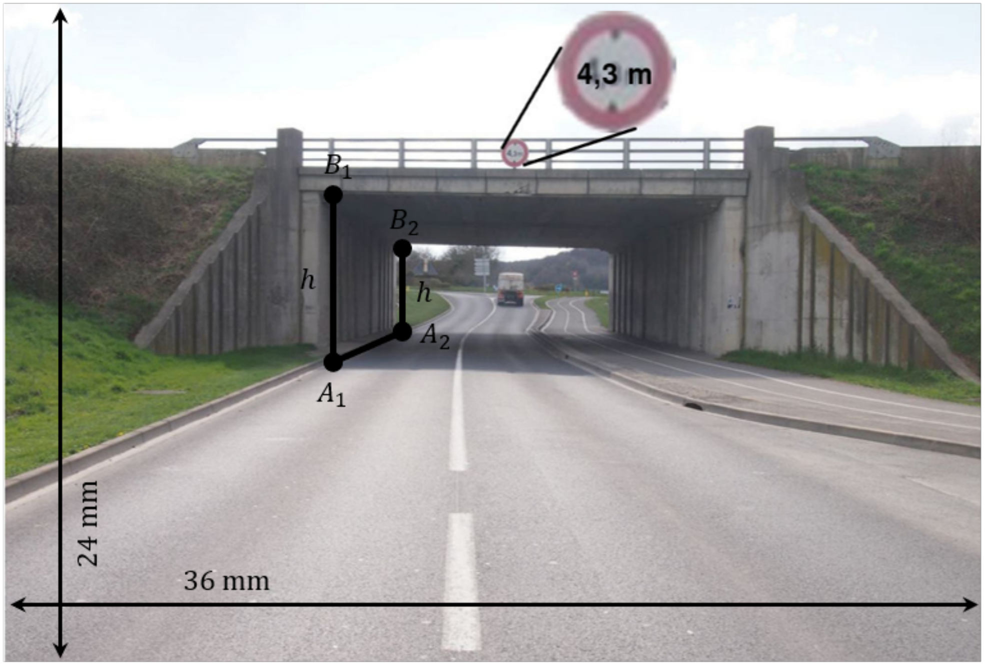
Finalement, on obtient une image réelle (car le sens de parcours de la lumière a été inversée), positionnée en $\boxed{\overline{OA'} = -2f'}$ et de grandissement $\boxed{\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 = -2}$.

3) En reprenant les équations de la question précédente mais en injectant $\overline{OA} = -f'$, on obtient : $\overline{OA_1} = \pm\infty$, $\overline{OA_2} = \mp\infty$ et enfin $\boxed{\overline{OA'} = -f'}$.

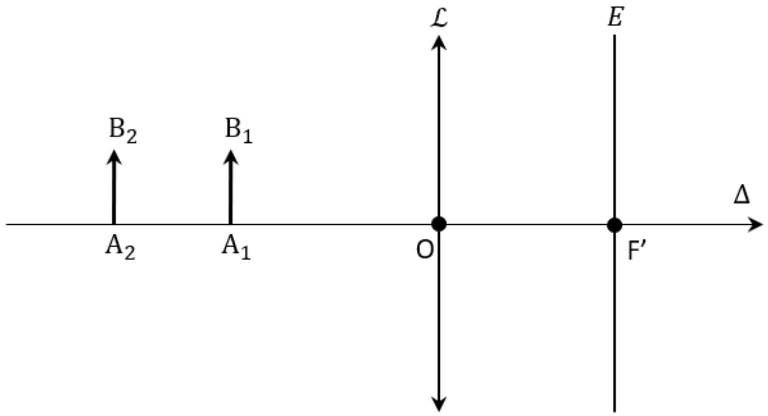
4) C'est l'auto-collimation.

Exercice n°3 • Estimation de la largeur d'un pont *cours*

On utilise les notations ci-dessous.



Avec un schéma traditionnel d'optique, la situation devient :



On cherche la distance $\overline{A_1A_2}$. On note O le centre de la lentille de l'appareil photo. On a : $\overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$. Il faut donc déterminer les distances $\overline{OA_1}$ et $\overline{OA_2}$. On utilise les formules de grandissement ($k = 1$ ou 2).

$$\gamma = \frac{\overline{A'_kB'_k}}{\overline{A_kB_k}} = \frac{\overline{OA'_k}}{\overline{OA_k}} \quad \Rightarrow \quad \overline{OA_k} = \overline{OA'_k}\,\frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{A'_kB'_k}}$$

La hauteur du pont est connue : $\boxed{\overline{A_kB_k} = h = 4,3\text{ m}}$.
Le pont est supposé à l'infini ($OA_k \gg f'$). Ainsi,

$$\frac{1}{\overline{OA'_k}} - \frac{1}{\overline{OA_k}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{OA'_k} \simeq f' = 35\text{ mm}}$$

Enfin, on sait que le capteur fait 24 mm $\times$ 36 mm, ce qui permet, à l'aide d'un produit en croix ($8,7$ cm $\leftrightarrow 24$ mm), de déterminer $\overline{A'_kB'_k}$. On trouve :

$$\boxed{\overline{A'_1B'_1} = 2,1 \cdot \frac{24}{8,7} = 5,8\text{ mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{A'_2B'_2} = 1,1 \cdot \frac{24}{8,7} = 3,0\text{ mm}}$$

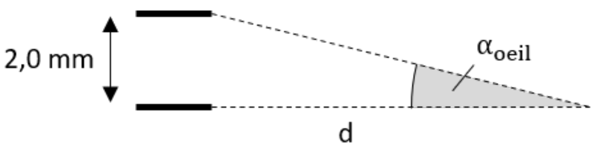
On en déduit :

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1} = f' \cdot h \cdot \left(\frac{1}{\overline{A'_2B'_2}} - \frac{1}{\overline{A'_1B'_1}}\right) \simeq 24\text{ m}$$

Étant donné la précision des calculs, on peut donner le résultat avec un seul chiffre significatif : la largeur du pont vaut environ $\boxed{2 \cdot 10^1\text{ m}}$.

Exercice n°4 • Pouvoir séparateur de l'œil ★☆☆

1) L'œil a un pouvoir séparateur de l'ordre de : $\boxed{\alpha_{\text{œil}} \simeq 1' \simeq 3 \cdot 10^{-4}\text{ rad}}$.
2) On cherche la distance d telle que les deux traits soient vus sous l'angle $\alpha_{\text{œil}}$.



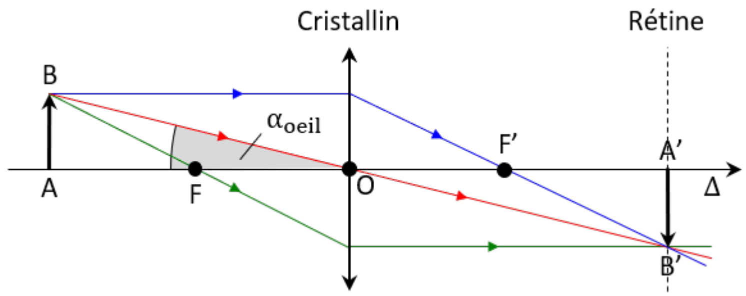
Ainsi, puisque $\alpha_{\text{œil}} \ll 1$ rad, on a :

$$d = \frac{2,0 \cdot 10^{-3}}{\tan(\alpha_{\text{œil}})} \simeq \frac{2,0 \cdot 10^{-3}}{\alpha_{\text{œil}}} = \boxed{7\text{ m}}$$

3) Il s'agit du même raisonnement. On appelle h la hauteur de la lettre. Ainsi :

$$h \simeq 250 \times \alpha_{\text{œil}} = \boxed{75\text{ mm}}$$

4) Soit un objet AB situé à une distance OA de l'œil. À la limite de la résolution de l'œil, l'objet est vu sous un angle $\alpha_{\text{œil}}$.



Cette limite de résolution correspond au cas où l'image est de l'ordre de la taille d'un récepteur (appelée $d_{\text{récep}} = A'B'$). En effet, dans le cas d'un objet plus petit la lumière incidente n'active qu'un seul récepteur et on ne distingue pas les points A et B. Ainsi :

$$\alpha_{\text{œil}} \simeq \tan(\alpha_{\text{œil}}) = \frac{A'B'}{OA'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_{\text{récep}} = OA' \times \alpha_{\text{œil}} \simeq 7,5\text{ µm}}$$

Exercice n°5 • Lentilles de contact ★★☆

1) On considère la transformation suivante :

$$A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2$$

Alors, la relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

En sommant les deux :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$$

On retrouve une relation de conjugaison analogue, pour la transformation : $A \xrightarrow{\mathcal{L}_{eq}} A_2$, où $\mathcal{L}_{eq}$ est une lentille de distance focale :

$$\boxed{\frac{1}{f_{eq}'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}}$$

2) On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V$$

avec $\overline{OA'} = 15,0$ mm, $\overline{OA} = -25,0$ cm pour le PP et $\overline{OA} = -\infty$ pour le PR. Cela qui correspond à une vergence :

$$\boxed{V_{\text{œil PP}} = 70,7\ \delta} \qquad \boxed{V_{\text{œil PR}} = \frac{1}{d_0} = 66,7\ \delta}$$

3) On cherche les valeurs de $\overline{OA}$, avec $\overline{OA'} = 15,2$ mm, $V = V_{\text{œil PR}}$ pour le PR et $V = V_{\text{œil PP}}$ pour le PP.

$$\boxed{\text{PP} = -20,5 \text{ cm}} \qquad \boxed{\text{PR} = -1,14 \text{ m}}$$

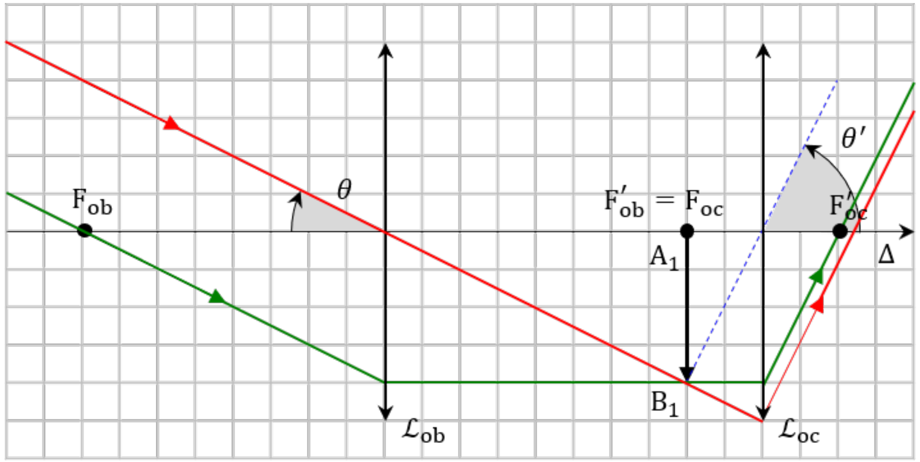
Un œil myope voit donc légèrement plus proche qu'un œil emmétrope (PP plus proche de l'œil) et il ne voit pas correctement à plus d'un mètre environ.

4) Pour corriger le défaut de l'œil, il faut ramener le PR à l'infini. Il faut donc que, au PR, le système { œil myope + lentille } ait une vergence $V_{\text{tot, PR}} = V_{\text{œil PR}}$. La formule des vergence nous dit que :

$$V_{\text{tot, PR}} = \frac{1}{d_1} + V_{\text{lentille}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\text{lentille}} = 66,7 - 65,8 = -0,9\ \delta}$$

Exercice n°6 • Lunette astronomique ★★☆

1)



L'image est à l'infini hors de l'axe optique. Elle est renversée (les rayons ont changé de sens), réelle et grossie $(\theta' > \theta)$.

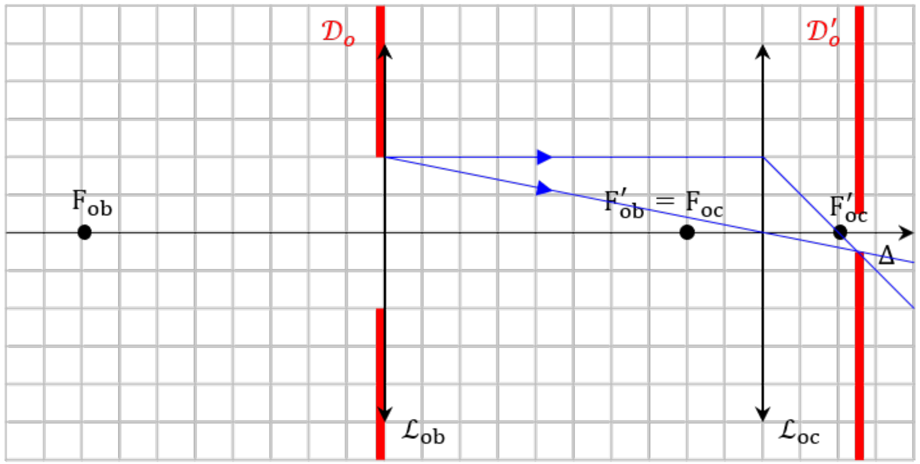
2) (a) C'est un système afocal (elle renvoie à l'infini l'image d'un objet situé à l'infini) grossissant.

(b) On a :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan(\theta')}{\tan(\theta)} = \frac{A_1B_1/f_{oc}'}{A_1B_1/f_{ob}'} = \boxed{\frac{f_{ob}'}{f_{oc}'} = 4}$$

3)

(a) Pour trouver le cercle oculaire, il suffit de trouver l'image des extrémités du diaphragme $\mathcal{D}_0$ (voir schéma ci-dessous).



(b) Transformation (avec C le centre du cercle oculaire) : $O_{ob} \xrightarrow{\mathcal{L}_{oc}} C$.
Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{O_{oc}C}} - \frac{1}{\overline{O_{oc}O_{ob}}} = \frac{1}{f'_{oc}} \quad \Rightarrow \quad \overline{O_{oc}C} = \left(-\frac{1}{f'_{ob}+f'_{oc}} + \frac{1}{f'_{oc}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_{oc}C} = \frac{f'_{oc}\left(f'_{ob}+f'_{oc}\right)}{f'_{ob}}}$$

Grandissement :

$$\gamma = \frac{\mathcal{D}'_0}{\mathcal{D}_0} = \frac{O_{oc}C}{O_{oc}O_{ob}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{D}'_0 = \mathcal{D}_0 \cdot \frac{f'_{oc}}{f'_{ob}}}$$

(c) Sur le cercle oculaire, car c'est là que l'on collecte le plus de lumière.

(d) Il joue sur la luminosité de l'image de l'image.

4)

	Lune	Vénus	Mars
Distance (m)	$3,82 \cdot 10^{8}$	$8,12 \cdot 10^{10}$	$7,85 \cdot 10^{10}$
Diamètre (m)	$3,52 \cdot 10^{6}$	$1,21 \cdot 10^{7}$	$6,79 \cdot 10^{6}$
$\alpha_{\text{œil}} = \dfrac{\text{Diam.}}{\text{Dist.}}$ (rad)	$9,2 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$
$\alpha_{\text{œil}} > 1'$?	Oui	Non	Non
$\alpha_{\text{lunette}} = G \cdot \alpha_{\text{œil}}$ (rad)	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
$\alpha_{\text{lunette}} > 1'$?	Oui	Oui	Oui

Exercice n°7 • Cascade inférieure du Yellowstone ★★☆

1) On note AB la cascade, située à une distance OA de l'appareil photo. On note $A'B'$ l'image de AB sur le capteur CCD. Le paramètre recherché est la hauteur AB. Pour le trouver, on utilise la formule du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'}\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}}$$

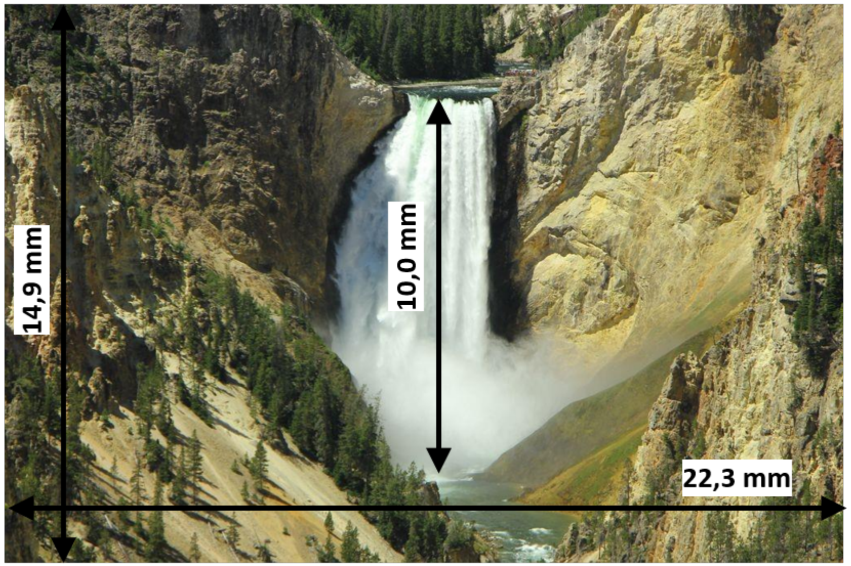
Pour trouver AB, il faut donc déterminer les trois paramètres $A'B'$, OA et OA'.

La distance OA se déduit de la carte accompagnée de sa légende. On trouve par simple lecture, $\boxed{\overline{OA} = -1400 \text{ m}}$.

La distance OA' peut se déterminer soit en supposant que la cascade est à l'infini, dans ce cas : $\boxed{\overline{OA'} = f' = 135 \text{ mm}}$; soit en faisant le calcul complet depuis une relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{OA'} = \left(\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}\right)^{-1} \simeq 135 \text{ mm}}$$

Finalement, la distance $A'B'$ correspond à la taille de l'image de la cascade sur le capteur. Or, on sait que le capteur mesure 14,9 mm de hauteur.



On en déduit donc : $\boxed{\overline{A'B'} \simeq -10 \text{ mm}}$.

Ainsi :

$$\boxed{\overline{AB} = \overline{A'B'}\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \simeq 104 \text{ m}}$$

On n'oublie pas de commenter le résultat trouvé ! Ce résultat est parfaitement cohérent : il s'agit de la hauteur typique d'une grande cascade.

Remarque : la véritable hauteur est 106 m. On est donc très proche !

2) Il faut jouer sur le temps d'exposition.

3) Il faut jouer sur l'ouverture du diaphragme.

Exercice n°8 • Photographie d'un papillon ★★★

1) On a $\overline{OA} = -d_p$ et on cherche $\overline{OA'} = D$. La relation de conjugaison de Descartes donne :

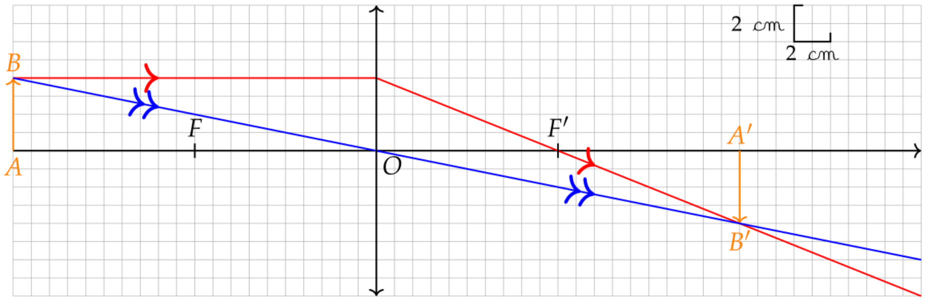
$$\frac{1}{D} - \frac{1}{-d_p} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{d_p}\right)^{-1} = 20 \text{ cm}}$$

Le grandissement vaut :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{D}{d_p} = -1}$$

L'image est de même taille et renversée. On a donc : $\boxed{h'_p = 4,0 \text{ cm}}$.

2)



3) Avec cet objectif, on réalise la suite de conjugaison suivante : $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A' = P$. Utilisons la relation de conjugaison de Descartes avec la lentille $\mathcal{L}_1$ avec $\overline{O_1A} = -d_p$.

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{O_1A_1} = \left(\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f'_1}\right)^{-1}}$$

On en déduit la distance entre A_1 et la seconde lentille.

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + \left(\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{f'_1}\right)^{-1}$$

On utilise la relation de conjugaison de Descartes avec la seconde lentille.

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \Rightarrow \quad D' = \overline{O_2A'} = \left(\frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}}\right)^{-1}$$

On remplace par la formule trouvée précédemment.

$$\boxed{D' = \left(\frac{1}{f'_2} + \frac{1}{-e + \left(\frac{1}{-d_p} + \frac{1}{f'_1}\right)^{-1}}\right)^{-1} = 8,3 \text{ cm}}$$

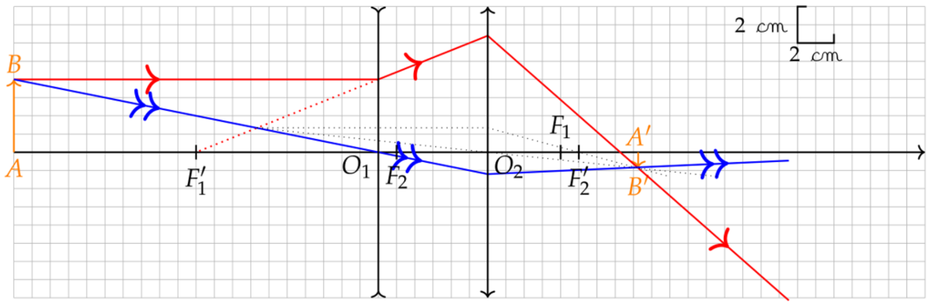
Pour trouver la taille de l'image, utilisons les formules de grandissement. On a :

$$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \cdot \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\left(\frac{1}{-d_p} + \frac{1}{f'_1}\right)^{-1}}{-d_p} \cdot \frac{D'}{-e + \left(\frac{1}{-d_p} + \frac{1}{f'_1}\right)^{-1}}$$

Ainsi,

$$\boxed{h'_p = |h_p \cdot \gamma| = \frac{D' h_p}{d_p} \left(1 - e\left(\frac{1}{-d_p} + \frac{1}{f'_1}\right)\right)^{-1} = 0,87 \text{ cm}}$$

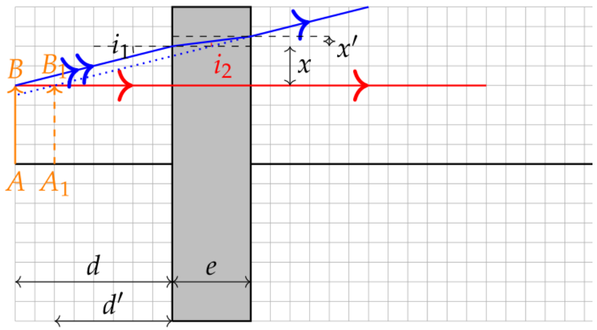
4)



5) L'image avec le premier objectif est plus grande que celle avec l'objectif alternatif. On aura donc plus de détails avec l'objectif standard. L'objectif alternatif permet de réduire l'encombrement de l'appareil photo.

6) Lois Snell-Descartes de la réfraction : le rayon réfracté appartient au plan d'incidence et les angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 sont reliés par la relation : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$.

7)



8) On note i_1 l'angle d'incidence dans l'air, i_2 l'angle de réfraction dans le verre, et on définit sur le schéma ci-dessus les distances x, x', d et d'. Dans les conditions de Gauss, les lois de Snell-Descartes donnent : $i_1 = ni_2$. De plus,

$$\tan(i_1) = i_1 = \frac{x}{d} = \frac{x+x'}{d'+e} \qquad \tan(i_2) = i_2 = \frac{x'}{e}$$

On a donc :

$$\frac{x}{d} = \frac{x+x'}{d'+e} \quad \Rightarrow \quad d'+e = d\frac{x+x'}{x} \quad \Rightarrow \quad d' = d\left(1+\frac{x'}{x}\right) - e$$

De plus,

$$i_2 = \frac{i_1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{e} = \frac{x}{nd} \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{x} = \frac{e}{nd}$$

Finalement, en combinant les deux expressions :

$$\boxed{d' = d\left(1+\frac{e}{nd}\right) - e = d + e\left(\frac{1}{n} - 1\right)}$$

9) La distance entre le papillon et son image par la vitre est $\Delta d = d - d' = e\left(\frac{1}{n} - 1\right)$ et ne dépend pas de la position de la vitre. Ainsi, la position de la vitre n'influe pas sur la position de l'image du papillon par la vitre, ni par conséquent sur celle de cette image par la lentille de l'appareil photo.

10) Le capteur était placé pour faire la mise au point sur le papillon. Or l'image du papillon à travers la vitre n'est pas située au même endroit que le papillon lui-même. Par conséquent, l'image du papillon n'est plus visible sur le capteur. Il faut changer la position du capteur.

11) On a la transformation : $A \xrightarrow{\text{Vitre}} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} A' = P$. Pour que l'image du papillon soit réelle, il faut que $\overline{OA'} > 0$. Il faut donc que A_1 soit placé avant le point focal de la lentille. Donc : $\boxed{\overline{OA_1} \leqslant f'}$.

12) La distance minimale d_m correspond au cas d'égalité de la relation précédente.

$$\overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1} = -f' \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} = -f' - \overline{AA_1} = -\left(f' + e\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d_m = OA = f' + e\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 10,3 \text{ cm}}$$